

Tugas Aljabar Linier (c)

No
Date

1. Determine the solution set of each of the following systems of equations

$$(a). \begin{array}{l|l|l} x-y=5 & \times 2 & 2x-2y=10 \\ 2x+2y=8 & \times 1 & 2x+2y=8 \end{array} +$$

$$4x=18$$

$$x = \frac{9}{2}$$

$$x-y=5$$

$$y = x-5$$

$$= \frac{9}{2} - 5$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Jadi, $x = \frac{9}{2}$ dan $y = -\frac{1}{2}$

$$(b). x+5y=0$$

$$x-3y=0 \rightarrow x=3y$$

Sehingga, ketika disubstitusi pada Persamaan (i),

$$x+5y=0$$

$$\text{Diperoleh : } x-3y=0$$

$$3y+5y=0$$

$$x=0$$

$$8y=0$$

$$y=0$$

Jawab : $x=0$ dan $y=0$

$$(c). \begin{array}{l|l|l} x-2y=-2 & \times 3 & 3x-6y=-6 \\ -3x+6y=6 & \times 1 & -3x+6y=6 \end{array}$$

Karena kedua persamaan tersebut identik, gunakan salah satu

$$3x-6y=-6$$

$$x-2y=-2$$

$$x=2y-2$$

misal : $y=t$, maka

$$x=2t-2$$

Jawab : $(x, y) = (2t-2, t)$

dengan t merupakan sebarang bil. real (Tak hingga penyelesaian)

$$(d). \begin{array}{l|l|l} 2x+6y=1 & \div 2 & x+3y=\frac{1}{2} \dots (i) \\ x+3y=3 & \div 1 & x+3y=3 \dots (ii) \end{array}$$

Karena persamaan (i) kontradiktif dengan persamaan (ii), maka sistem persamaan linear tersebut tidak memiliki penyelesaian.

2). Determine the solution set of each of the following systems of equations.

$$(a). \begin{array}{l|l} 2x - y = 1 & x_2 \\ 2x - 2y = 3 & x_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - 2y = 2 \dots (i) \\ 2x - 2y = 3 \dots (ii) \end{array}$$

karena persamaan (i) kontradiktif dengan persamaan (ii), maka sistem persamaan linier tersebut tidak memiliki penyelesaian.

$$(b). 2x + 5y = 0$$

$$x - 4y = 0 \rightarrow x = 4y$$

Substitusikan nilai $x = 4y$ ke persamaan $2x + 5y = 0$

$$\begin{array}{l|l} 2x + 5y = 0 & x = 4y \\ 8y + 5y = 0 & x = 0 \\ 13y = 0 & \\ y = 0 & \end{array}$$

Jawab: $x = 0$ dan $y = 0$

$$(c). 3x - 2y = -2$$

$$-3x + 6y = 0 \rightarrow 3x = 6y$$

$$x = 2y$$

Substitusi nilai $x = 2y$ ke $3x - 2y = -2$

$$3(2y) - 2y = -2$$

$$6y - 2y = -2$$

$$4y = -2$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$$3x - 2y = -2$$

$$3x - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$3x + 1 = -2$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

Jawab: $x = -1$ dan $y = -\frac{1}{2}$

$$(d). \begin{array}{l|l} 2x + 8y = -6 & x_1 \\ -x - 4y = 3 & x_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + 8y = -6 \\ -2x - 8y = 6 \end{array}$$

karena kedua persamaan identik, maka gunakan salah satu persamaan

$$-x - 4y = 3$$

$$x = 3 - 4y$$

► Anggap $y = t$, maka $x = 3 - 4t$

Jawab: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4t \\ t \end{pmatrix}$ dengan t sebarang bil. real, sehingga sistem persamaan linier tersebut memiliki banyak penyelesaian.

3. Determine the solution set of each of the following systems of equations.

(a). $6x - 2y - 2z = 10$

$$2x + z = 5 \rightarrow z = 5 - 2x$$

Substitusi $z = 5 - 2x$ ke persamaan (i)

$$6x - 2y - 2z = 10$$

$$6x - 2y - 2(5 - 2x) = 10$$

$$6x - 2y - 10 + 4x = 10$$

$$10x - 2y = 20$$

$$5x - y = 10$$

$$y = 5x - 10$$

Diperoleh : $x = x$

$$y = 5x - 10$$

$$z = 5 - 2x$$

Ambil $x = t$, maka penyelesaiannya

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 5t - 10 \\ 5 - 2t \end{pmatrix}$$

dengan t sebarang bilangan real
(penyelesaian tak hingga).

(b). $x - 3y + z = 0$

$$x + 5y - 2z = 0$$

$$2x + 10y - 2z = 0$$

► Metode eliminasi Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 10 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{B_1 - B_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -16 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2B_1 - B_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}B_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-3B_3 + B_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{8}B_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{3B_2 + B_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Jawab : $x = 0, y = 0, \text{ dan } z = 0$

4. Determine the solution set of each of the following systems of equations in four variable

$$(a). \quad 3X_1 + X_2 - X_3 = 0 \quad \dots (i)$$

$$X_1 - 2X_2 - X_4 = 0 \quad \dots (ii)$$

$$X_1 + 3X_2 = 0 \quad \dots (iii)$$

* Gunakan eliminasi & Substitusi

① Ambil persamaan (iii)

$$X_1 + 3X_2 = 0$$

$$X_1 = -3X_2$$

② Hasil dari langkah ① substitusikan ke persamaan (ii)

$$X_1 - 2X_2 - X_4 = 0$$

$$-3X_2 - 2X_2 - X_4 = 0$$

$$-5X_2 - X_4 = 0$$

$$X_4 = -5X_2$$

③ Hasil dari langkah ① substitusikan ke persamaan (i)

$$3X_1 + X_2 - X_3 = 0$$

$$3(-3X_2) + X_2 - X_3 = 0$$

$$-9X_2 + X_2 - X_3 = 0$$

$$-8X_2 - X_3 = 0$$

$$X_3 = -8X_2$$

Sehingga, diperoleh penyelesaian : $X_1 = -3X_2$, $X_2 = X_2$, $X_3 = -8X_2$, $X_4 = -5X_2$
Ambil sebarang bil. real t , lalu misalkan $X_2 = t$

$$X_1 = -3t$$

$$X_2 = t$$

$$X_3 = -8t$$

$$X_4 = -5t$$

Penyelesaian :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ t \\ -8t \\ -5t \end{pmatrix}$$

yang membuat penyelesaian tak hingga



$$4. b). \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \quad \dots (i) \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 1 \quad \dots (ii) \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \quad \dots (iii) \end{aligned}$$

► Gunakan eliminasi substitusi

① Eliminasi persamaan (i) dan (ii)

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \times 1 \\ \times 2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

$$\hline -x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -2 \quad \dots (iv)$$

② Eliminasi (iii) dan (iv)

$$\begin{array}{rcl} x_2 + 2x_3 - 3x_4 & = & 2 \\ -x_2 + 4x_3 - 2x_4 & = & -2 \\ \hline 6x_3 - 5x_4 & = & 0 \\ 6x_3 & = & 5x_4 \\ x_3 & = & \frac{5}{6}x_4 \end{array}$$

③ Substitusi nilai x_3 pada persamaan (iii)

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_2 + \frac{5}{3}x_4 - 3x_4 &= 2 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_2 = 2 + \frac{4}{3}x_4$$

④ $2x_1 - x_2 = 0$
 $2x_1 - \left(2 + \frac{4}{3}x_4\right) = 0$

$$2x_1 = 2 + \frac{4}{3}x_4$$

$$x_1 = 1 + \frac{2}{3}x_4$$

misal ambil t sebarang bilangan real dan anggap $x_4 = t$, maka

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{3}t \\ 2 + \frac{4}{3}t \\ \frac{5}{6}t \\ t \end{pmatrix}$$

jadi, sistem persamaan linear tersebut memiliki tak hingga penyelesaian

5. Determine the solution set of each of the following systems of equations in four variables.

(a). $x + y + z + w = 7$

misal : $y = r$

$z = s$

$w = t$

dengan r, s, t sebarang bilangan real, maka

Penyelesaian
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - r - s - t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

Sehingga, sistem persamaan linear tersebut memiliki tak hingga penyelesaian

(b). $x - z = 3 \rightarrow x = z + 3$

$y + w = 2 \rightarrow y = 2 - w$

misal : $z = s$

$w = t$

dengan s, t sebarang bilangan real, maka

Penyelesaian
$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s + 3 \\ 2 - t \\ s \end{pmatrix}$$

Sehingga, sistem persamaan linear tersebut memiliki tak hingga penyelesaian

6. Determine the solution set of each of the following systems of equations. Explain, in geometric terms, what the solution set looks like.

(a). $x + 3y + z = 0 \dots (i)$

$x - y + 3z = 0 \dots (ii)$

$2y - z = 0 \dots (iii) \rightarrow z = 2y \dots (iii)$

► Gunakan eliminasi Substitusi

① Substitusi (iii) ke (ii)

$x - y + 3z = 0$

$x - y + 3(2y) = 0$

$x - y + 6y = 0$

$x + 5y = 0 \dots (iv)$

② Substitusi (iii) ke (i)

$x + 3y + z = 0$

$x + 3y + 2y = 0$

$x + 5y = 0 \dots (v)$

③ Substitusi (i) ke (ii)

$$x + 3y + z = 0$$

$$x - y + 3z = 0$$

$$4y - 2z = 0$$

$$2y - z = 0 \dots (vi)$$

Diperoleh bahwa

$$z = 2y \text{ dan } x = -5y$$

Sehingga, diperoleh dalam bentuk parameter
 $(x, y, z) = (-5t, t, 2t)$

Dalam geometric terms, ketiga persamaan tersebut memiliki tak hingga banyak titik yang menjadi titik potong ketiga grafik. Titik potong tersebut berada pada garis yang membentang dari $(0, 0, 0)$ dan $(-5, 1, 2)$.

(b). $x + 3y + z = 1$

$$x - y + 3z = 1$$

$$2y - z = 1$$

$$z = 2y - 1$$

$$\Rightarrow x + 3y + z = 1$$

$$x + 3y + 2y - 1 = 1$$

$$x + 5y = 2$$

$$x = 2 - 5y \dots (iv)$$

$$\Rightarrow x - y + 3z = 1$$

$$x - y + 3(2y - 1) = 1$$

$$x - y + 6y - 3 = 1$$

$$x + 5y = 4$$

$$x = 4 - 5y \dots (v)$$

Karena dari (iv) dan (v) terdapat kontradiksi, maka grafik dari ketiga persamaan tidak memiliki titik potong.